BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

RİYAZİYYAT

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Г.К.НАМАЗОВ, А.М.АЛИЕВА
Бакинский Государственный Университет

В работе изучается непрерывная зависимость классического решения обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями.

Рассмотрим следующую обратную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t\partial x^2} - \beta\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = a_0(t)u(x,t) + a_1(t)g(x,t) + f(x,t)$$

$$(x,t)\in Q_T = \{(x,t): 0\le x\le 1, 0\le t\le T\}, \quad (1)$$

$$u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)+\delta u_t(x,T)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1, \quad (2)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0\le t\le T, \quad (3)$$

$$\alpha_i u_x(0,t)+\beta_i u_x(1,t)+\int_0^1 \kappa_i(x)u(x,t)dx = h_i(t)\quad (i=0,1),\ \ 0\le t\le T, \quad (4)$$

где $\varphi(x),\psi(x),\ h_i(t),\ \kappa_i(x)\ (i=0,1),\ g(x,t),\ f(x,t)$ – заданные функции, $\delta,\ \alpha_i,\ \beta_i\ (i=0,1),\ \alpha>0,\ \beta\ge 0$ – заданные числа, а $a_0(t),\ a_1(t),\ u(x,t)$ - искомые функции.

Определение. Тройку $\{a_0(t),a_1(t),u(x,t)\}$ функций $a_0(t),a_1(t),u(x,t)$ назовем классическим решением задачи (1)-(4), если она удовлетворяет следующим условиям:

1. функция $u(x,t)$ непрерывна в Q_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
2. функции $a_i(t)\ (i=0,1)$ непрерывны на $[0,T]$;
3. уравнение (1) и условия (2)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Введем некоторые обозначения.

Пусть $B_{2,T}^4$ совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k=k\pi\,, \tag{5}$$

рассматриваемых в Q_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,\,T]$ и норма в $B^4_{2,T}$ определяется так:

$$J(u)=\|u(x,t)\|_{B^4_{2,T}}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{1/2}<\infty\,.$$

Через $\mathrm{E_T}$ обозначим множество всех вектор функций $z=\{a_0,a_1,u\}$, входящие в топологическое произведение $C[0,T]\times C[0,T]\times B^4_{2,T}$. Норма элемента $z=\{a_0,a_1,u\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T}=\|a_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)\|_{B^4_{2,T}}\,.$$

$B^4_{2,T}$ и E_T являются банаховыми пространствами (см. [3]).

Предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

1°. $\varphi(x)\in C^3[0,1],\ \varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,1),\quad \varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(1)=0\ \ (s=0,1)$.

2°. $\psi(x)\in C^3[0,1],\ \psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1),\ \psi^{(2s)}(0)=\psi^{(2s)}(1)=0\ \ (s=0,1)$.

3°. $f(x,t)\in C^{(3,0)}(Q_T),\ \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)\in L_2(Q_T)$,

$$\frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}}f(0,t)=\frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}}f(1,t)=0\qquad (s=0,1).$$

4°. $g(x,t)\in C^{(3,0)}(Q_T),\ \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)\in L_2(Q_T)$,

$$\frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}}g(0,t)=\frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}}g(1,t)=0\quad (s=0,1).$$

5°. $\alpha^2\pi^2-4\beta>0$, $1-|\delta|e^{-\frac{\alpha\pi^2}{2}T}\neq 0,\ 1-|\delta|e^{-\frac{\beta}{\alpha}T}\neq 0$,
$K_i(x)\in L_1(0,1)\ (i=0,1)$.

Кроме этого, либо $\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1\neq 0$, либо $\alpha_0=\beta_0=0$, $\kappa_0(x)\neq 0$, $|\alpha_1|+|\beta_1|\neq 0$, либо $\alpha_0=\beta_0=\alpha_1=\beta_1=0$, $\kappa_0(x)\neq 0,\ \kappa_1(x)\neq 0$.

6°. Функции $h_i(t)\ (i=0,1)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и $h(t)=h_0(t)g_{01}(t)-h_1(t)g_{00}(t)\neq 0$, где

$$g_{0i}(t)=\alpha_i g_x(0,t)+\beta_i g_x(1,t)+\int_0^1\kappa_i(x)g(x,t)dx\quad (i=0,1).$$

7°. $\alpha_i\varphi'(0)+\beta_i\varphi'(1)+\int_0^1\kappa_i(x)\varphi(x)dx=h_i(0)+\delta h_i(T)$,

$$\alpha_i\psi'(0)+\beta_i\psi'(1)+\int_0^1\kappa_i(x)\psi(x)dx=h_i'(0)+\delta h_i'(T)\quad (i=0,1).$$

Формально разыскивая третью компоненту классического решения $\{a_0(t), a_1(t),\ u(x,t)\}$ задачи (1)-(4) в виде (5), для определения функций $u_k(t)$ получаем следующую задачу:

$$u_k''(t)+\alpha\lambda_k^2u_k'(t)+\beta\lambda_k^2u_k(t)=F_k(t)\,, \tag{6}$$

$$u_k(0)+\delta u_k(T)=\varphi_k\,,\ u_k'(0)+\delta u_k'(T)=\psi_k\,,\quad k=1,2,... \tag{7}$$

где

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\quad \psi_k=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k x dx,$$

$$F_k(t)=f_k(t)+a_0(t)u_k(t)+a_1(t)g_k(t),$$

$$f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx,\quad g_k(t)=2\int_0^1 g(x,t)\sin\lambda_k x dx.$$

Решая задачу (6), (7) получаем следующую счетную систему:

$$u_k(t)=\frac{1}{\gamma_k}\Bigg[(\rho_{1k}(T)\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t}-\rho_{2k}(T)\mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\varphi_k+(\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}t}-$$

$$-\rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}t})\psi_k+\delta\int_0^T F_k(\tau)(\rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}-\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)})d\tau+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau)(e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-e^{\mu_{1k}(t-\tau)})d\tau\Bigg], \tag{8}$$

где

$$\mu_{jk}=-\lambda_k\left(\frac{\alpha}{2}\lambda_k-(-1)^j\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4}-\beta}\right)\quad (j=1,2),$$

$$\gamma_k=\mu_{2k}-\mu_{1k}\,,\rho_{jk}(T)=(1+\delta e^{\mu_{jk}T})^{-1}\ (j=1,2)\,.$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ из (8) в (5), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения задачи (1)-(4), получаем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\gamma_k}\Bigg[(\rho_{1k}(T)\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t}-\rho_{2k}(T)\mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\varphi_k+(\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}t}-$$

$$-\rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}t})\psi_k+\delta\int_0^T F_k(\tau)(\rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}-\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)})d\tau+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau)\left(e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-e^{\mu_{1k}(t-\tau)}\right)d\tau\Bigg]\Bigg\}\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k=k\pi. \tag{9}$$

Далее, из (4) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)P_{ik}=h_i(t)\ (i=0,1), \tag{10}$$

где

$$P_{ik}=\alpha_i\lambda_k+\beta_i\lambda_k\cos\lambda_k+\int_0^1\kappa_i(x)\sin\lambda_k xdx \quad (i=0,1).$$

Подставим $u_k(t)$ из (8) в (10) и дважды дифференцируем обе части полученного соотношения. Тогда находим, что

$$a_0(t)=h^{-1}(t)(H_0(t)g_{01}(t)-H_1(t)g_{00}(t)), \qquad (11)$$

$$a_1(t)=h^{-1}(t)(h_0(t)H_1(t)-h_1(t)H_0(t)), \qquad (12)$$

где

$$H_i(t)=h_i''(t)-f_{0i}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)P_{ik} \qquad (i=0,1), \qquad (13)$$

$$g_{0i}(t)=\alpha_i g_x(0,t)+\beta_i g_x(1,t)+\int_0^1\kappa_i(x)g(x,t)dx,$$

$$f_{0i}(t)=\alpha_i f_x(0,t)+\beta_i f_x(1,t)+\int_0^1\kappa_i(x)f(x,t)dx,$$

$$v_k(t)=\frac{1}{\gamma_k}\Big[\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{1k}\rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}t}-\mu_{2k}\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}t})\varphi_k+(\mu_{2k}^2\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}t}$$

$$-\mu_{1k}^2\rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}t})\psi_k+\delta\int_0^T F_k(\tau)(\rho_{1k}(T)\mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}-\rho_{2k}(T)\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)})d\tau+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau)\left(\mu_{2k}^2e^{\mu_{2k}(t-\tau)}-\mu_{1k}^2e^{\mu_{1k}(t-\tau)}\right)d\tau\Big]. \qquad (14)$$

В работе [2] доказано существование и единственность классического решения поставленной задачи (1)-(4).

Изучим непрерывную зависимость решения задачи (1)-(4) от данных $\varphi(x),\psi(x),\ f(x,t),\ g(x,t),\ h_i(t)\ (i=0,1)$.

Обозначим через $\{a_0(t),a_1(t),u(x,t)\}$ и $\{\overline{a}_0(t),\overline{a}_1(t),\overline{u}(x,t)\}$ классические решения задачи (1)-(4) в пространстве E_T соответствующие данным $\varphi(x),\psi(x),f(x,t),\ g(x,t),h_i(t)\ (i=0,1)$ и $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$, $\overline{f}(x,t)$, $\overline{g}(x,t)$, $\overline{h}_i(t)$ $(i=0,1)$.

Так как $h(t)=h_0(t)g_{01}(t)-h_1(t)g_{00}(t)$, то

$$\left|h(t)-\overline{h}(t)\right|=\left|h_0(t)g_{01}(t)-h_1(t)g_{00}(t)-(\overline{h}_0(t)\overline{g}_{01}(t)-\overline{h}_1(t)\overline{g}_{00}(t))\right|=$$

$$=\left|h_0(t)(g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t))-h_1(t)(g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t))+\overline{g}_{01}(h_0(t)-\overline{h}_0(t))-\right.$$

$$\left.-\overline{g}_{00}(t)(h_1(t)-\overline{h}_1(t))\right|\le|h_0(t)||g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t)|+|h_1(t)||g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t)|+$$

$$+|\overline{g}_{01}(t)|\cdot\left|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right|+|\overline{g}_{00}(t)|\cdot\left|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right|.$$

Следовательно

$$\left\|h(t)-\overline{h}(t)\right\|_{C[0,T]}\le\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\|g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\|g_{00}(t)-$$

$$-\bar{g}_{00}(t)\Big\|_{C[0,T]}+\big\|\bar{g}_{01}(t)\big\|_{C[0,T]}\Big\|h_0(t)-\bar{h}_0(t)\Big\|_{C[0,T]}+\big\|\bar{g}_{00}(t)\big\|_{C[0,T]}\Big\|h_1(t)-\bar{h}_1(t)\Big\|_{C[0,T]}. \quad (15)$$

С другой стороны

$$|g_{0i}(t)|=\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(t)||P_{ik}|\le c\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|g_k(t)|=c_i\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\left|g_k^{(2)}(t)\right|,$$

$$|g_{0i}(t)-\bar{g}_{0i}(t)|=c_i\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\left|g_k^{(2)}(t)-\bar{g}_k^{(2)}(t)\right| \quad (i=0,1),$$

где

$$g_k^{(2)}(t)=2\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\sin\lambda_k x dx, \quad \bar{g}_k^{(2)}(t)=2\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\sin\lambda_k x dx.$$

Тогда

$$\|g_{0i}(t)\|_{C[0,T]}\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]},$$

$$\|g_{0i}(t)-\bar{g}_{0i}(t)\|_{C[0,T]}\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(g(x,t)-\bar{g}(x,t)\big)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]} \quad (i=0,1). \quad (16)$$

Учитывая оценки (16) в (15), получаем:

$$\|h(t)-\bar{h}(t)\|_{C[0,T]}\le c_1\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+c_0\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+c_1\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}\left\|h_0(t)-\bar{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+c_0\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}\left\|h_1(t)-\bar{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left[(c_1\|h_0(t)\|_{C[0,T]}+c_0\|h_1(t)\|_{C[0,T]})\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$\left.+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}(c_1\left\|h_0(t)-\bar{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+c_0\left\|h_1(t)-\bar{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]})\right], \quad (17)$$

где $c_i=|\alpha_i|+|\beta_i|+\dfrac{1}{\pi}\int_0^1|K_i(x)|dx;$

Теперь, из (14) получаем:

$$|v_k(t)-\overline{v}_k(t)|\le \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2/4)-(\beta/\pi^2)}}\Big[\beta\Big(\alpha\rho_1(T)+\frac{2\beta}{\alpha\pi^2}\rho_2(T)\Big)\lambda_k^2|\varphi_k-\overline{\varphi}_k|+$$

$$+\Big(\alpha^2\rho_1(T)+\frac{4\beta^2}{\alpha^2\pi^4}\rho_2(T)\Big)\lambda_k^2|\psi_k-\overline{\psi}_k|+\Big((1+|\delta|\rho_1(T))\alpha^2+$$

$$+(1+|\delta|\rho_2(T))\frac{4\beta^2}{\alpha^2\pi^4}\Big)\lambda_k^2\int_0^T(|a_0(\tau)||u_k(\tau)-\overline{u}_k(\tau)|+|\overline{u}_k(\tau)||a_0(\tau)-\overline{a}_0(\tau)|+$$

$$+|a_1(\tau)||g_k(\tau)-\overline{g}_k(\tau)|+|\overline{g}_k(\tau)||a_1(\tau)-\overline{a}_1(\tau)|+\left|f_k(\tau)-\bar{f}_k(\tau)\right|)\Big]d\tau. \quad (18)$$

Из

$$\left|f_{0i}(t)-\bar{f}_{0i}(t)\right|\le c_i\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|f_k(t)-\bar{f}_k(t)\right|\le c_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k^{(2)}(t)-\bar{f}_k^{(2)}(t)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ясно, что

$$\left\|f_{0i}(t)-\bar{f}_{0i}(t)\right\|_{C[0,T]}\le c_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(x,t)-\bar{f}(x,t)\right)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}. \quad (19)$$

Из (13) следует, что

$$\left|H_i(t)-\overline{H}_i(t)\right|\le\left|h_i''(t)-\overline{h}_i''(t)\right|+\left|f_{0i}(t)-\bar{f}_{0i}(t)\right|+c_i\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|v_k(t)-\overline{v}_k(t)|\ .$$

Отсюда, учитывая (19), получаем:

$$\left\|H_i(t)-\overline{H}_i(t)\right\|_{C[0,T]}\le\left\|h_i''(t)-\overline{h}_i''(t)\right\|_{C[0,T]}+c_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+c_i\Big[b_1(T)\left\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+b_2(T)\left\|\psi^{(4)}(x)-\overline{\psi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+b_3(T)\sqrt{T}\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+b_3(T)\sqrt{T}\Big(\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\Big)+b_3(T)T(\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^4}+\left\|\overline{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^4}\left\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\right\|_{C[0,T]})\Big], \quad (20)$$

где

$$b_1(T)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-1/2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\beta\left(\alpha\rho_1(T)+\frac{2\beta}{\alpha\pi^2}\rho_2(T)\right),$$

$$b_2(T)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-1/2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left(\alpha^2\rho_1(T)+\frac{4\beta^2}{\alpha^2\pi^4}\rho_2(T)\right),$$

$$b_3(T)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-1/2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}\left((1+|\delta|\rho_1(T))\alpha^2+(1+|\delta|\rho_2(T))\frac{4\beta^2}{\alpha^2\pi^4}\right).$$

Соответственно соотношениям (11) и (12), получаем:

$$a_0(t)h(t)-\overline{a}_0(t)\overline{h}(t)=H_0(t)g_{01}(t)-H_1(t)g_{00}(t)-\overline{H}_0(t)\overline{g}_{01}(t)+\overline{H}_1(t)\overline{g}_{00}(t),$$
$$a_1(t)h(t)-\overline{a}_1\overline{h}(t)=h_0(t)H_1(t)-h_1(t)H_0(t)-\overline{h}_0(t)\overline{H}_1(t)+\overline{h}_1(t)\overline{H}_0(t)$$

или

$$h(t)(a_0(t)-\overline{a}_0(t))+\overline{a}_0(t)(h(t)-\overline{h}(t))=H_0(t)(g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t))+\overline{g}_{01}(t)\times$$
$$\times(H_0(t)-\overline{H}_0(t))-H_1(t)(g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t))-\overline{g}_{00}(t)(H_1(t)-\overline{H}_1(t)),$$
$$h(t)=(a_1(t)-\overline{a}_1(t))+\overline{a}_1(t)(h(t)-\overline{h}(t))=h_0(t)(H_1(t)-\overline{H}_1(t))+\overline{H}_1(t)\times$$
$$\times(h_0(t)-\overline{h}_0(t))-h_1(t)(H_0(t)-\overline{H}_0(t))-\overline{H}_0(t)(h_1(t)-\overline{h}_1(t)).$$

Соответственно, из последних соотношений получаем:

$$a_0(t)-\overline{a}_0(t)=h^{-1}(t)[-\overline{a}_0(t)(h(t)-\overline{h}(t))+H_0(t)(g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t))+$$
$$+\overline{g}_{01}(t)(H_0(t)-\overline{H}_0(t))-H_1(t)(g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t))-\overline{g}_{00}(t)(H_1(t)-\overline{H}_1(t))], \quad (21)$$
$$a_1(t)-\overline{a}_1(t)=h^{-1}(t)[-\overline{a}_1(t)(h(t)-\overline{h}(t))+h_0(t)(H_1(t)-\overline{H}_1(t))+$$
$$+\overline{H}_1(t)(h_0(t)-\overline{h}_0(t))-h_1(t)(H_0(t)-\overline{H}_0(t))-\overline{H}_0(t)(h_1(t)-\overline{h}_1(t))]. \quad (22)$$

Из соотношения (21) видно, что

$$\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\le\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}[\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\left\|h(t)-\overline{h}(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\|H_0(t)\|_{C[0,T]}\|g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}\left\|H_0(t)-\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\|H_1(t)\|_{C[0,T]}\|g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}\left\|H_1(t)-\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}]. \quad (23)$$

Аналогично, из (22) получаем:

$$\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}[\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left\|h(t)-\overline{h}(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\left\|H_1(t)-\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\left\|H_0(t)-\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}]. \quad (24)$$

Учитывая (15) в (23) и (24), получаем:

$$\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times\Big[\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\|h_0(t)\|_{C[0,T]}+\|H_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\|g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\big(\|H_1(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\|g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}\times$$
$$\times\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\left\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|H_0(t)-\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}\big)+\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}\times$$
$$\times\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\left\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|H_1(t)-\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\big)\Big], \tag{25}$$
$$\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \times$$
$$\times\Big[\big(\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\|g_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\left\|\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\big)\left\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\big(\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|H_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\left\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\|g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\left\|H_1(t)-\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\big)+$$
$$+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\|g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\left\|H_0(t)-\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}\big)\Big]. \tag{26}$$

Тогда
$$\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\Big\{\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\|h_0(t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\|H_0(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\|g_{01}(t)-\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\Big[\|H_1(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big]\|g_{00}(t)-\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\Big[\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+\left\|\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\Big]\left\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\Big[\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}\big(\|a_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+\left\|\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}\Big]\left\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\big(\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\left\|H_0(t)-\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\left\|H_1(t)-\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\Big\}. \tag{27}$$

Теперь, введя обозначение $m=\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right\}^{1/2}$ и учитывая (16) и (20) в (27), находим
$$\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]} \le$$
$$\le\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\Big\{\Big[\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+\left\|\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\Big]\times$$
$$\times\left\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\Big[\left\|\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big]\times$$
$$\times\left\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}+\big(\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\left\|h_0''(t)-\overline{h}_0''(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\left\|h_1''(t)-\overline{h}_1''(t)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+m\Big[\big(c_0\|h_0(t)\|_{C[0,T]}+c_1\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+$$

$$+\|H_0(t)\|_{C[0,T]}+\|H_1(t)\|_{C[0,T]}\Big]\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+m\Big[c_0\big(\|g_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+c_1\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big]\times$$

$$\times\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\Big[c_0\big(\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+c_1\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big]\times$$

$$\times\Big[b_1(T)\big\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\big\|_{L_2(0,1)}+b_2(T)\big\|\psi^{(4)}(x)-\overline{\psi}^{(4)}(x)\big\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+b_3(T)\sqrt{T}\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+b_3(T)\sqrt{T}\left(\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\right)+b_3(T)T\times$$

$$\times\Big(\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}}+\|\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}}\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\Big)\Big]\Big\}\ .(28)$$

Введем следующие обозначения:

$$q_1(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\Big(\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+\left\|\overline{H}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\Big),$$

$$q_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\Big(\left\|\overline{H}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big),$$

$$q_3(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big),$$

$$q_4(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big),$$

$$q_5(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}m\Big[\big(c_0\|h_0(t)\|_{C[0,T]}+c_1\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)\times$$
$$\times\big(\|\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+\|H_0(t)\|_{C[0,T]}+\|H_1(t)\|_{C[0,T]}\Big],$$

$$q_6(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}m\Big[c_0\big(\|g_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+$$
$$+c_1\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big],$$

$$q_{7+i}(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\times\Big[c_0\big(\|\overline{g}_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\big)+$$
$$+c_1\big(\|\overline{g}_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\big)\Big]b_{1+i}(T)\quad(i=0,1,2),$$

$$q_{10}(T)=q_9(T)\sqrt{T}\left\|a_1(t)\right\|_{C[0,T]}, \qquad q_{11}(T)=q_9(T)\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)},$$

$$q_{12}(T)=q_9(T)\sqrt{T}\left\|a_0(t)\right\|_{C[0,T]}, \qquad q_{13}(T)=q_9(T)\sqrt{T}\|\overline{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^4},$$

$$q(T)=q_{11}(T)+q_{12}(T)+q_{13}(T).$$

Тогда (28) примет вид:

$$\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\le$$
$$\le q_1(T)\left\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+q_2(T)\left\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+q_3(T)\left\|h_0''(t)-\overline{h}_0''(t)\right\|_{C[0,T]}+q_4(T)\left\|h_1''(t)-\overline{h}_1''(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+q_5(T)\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+q_6(T)\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+q_7(T)\left\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+q_8(t)\left\|\psi^{(4)}(x)-\overline{\psi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+q_9(T)\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$
$$+q_{10}(T)\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$
$$+\sqrt{T}q(T)\Big(\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^4}\Big). \quad (29)$$

Теперь, установим некоторые оценки. Имеем:

$$\lambda_k^4\left|u_k(t)-\overline{u}_k(t)\right|\le\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2\beta}{\alpha\pi^2}\rho_1(T)+\alpha\rho_2(T)\right)\left|\varphi_k^{(4)}-\overline{\varphi}_k^{(4)}\right|+\right.$$
$$+\left(\rho_2(T)-\rho_1(T)\right)\left|\psi_k^{(2)}-\overline{\psi}_k^{(2)}\right|+\left(2+|\delta|\left(\rho_1(T)+\rho_2(T)\right)\right)\times$$
$$\times\int_0^T\Big[\lambda_k^2\left(|a_0(\tau)||u_k(\tau)-\overline{u}_k(\tau)|+|\overline{u}_k(\tau)||a_0(\tau)-\overline{a}_0(\tau)|\right)+$$
$$\left.+|a_1(\tau)|\left|g_k^{(2)}(\tau)-\overline{g}_k^{(2)}(\tau)\right|+\left|\overline{g}_k^{(2)}(\tau)\right||a_1(\tau)-\overline{a}_1(\tau)|+\left|f_k^{(2)}(\tau)-\bar{f}_k^{(2)}(\tau)\right|\Big]d\tau\right].$$

Отсюда

$$\left\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^4}\le 2m_1(T)\left\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+2m_2(T)\left\|\psi^{(2)}(x)-\overline{\psi}^{(2)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+2m_3\sqrt{T}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+2m_3T\left(\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}}+\|\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}}\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\right)+$$

$$+2m_3\sqrt{T}\left(\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\right), \qquad (30)$$

где

$$m_1(T)=\sqrt{5}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\beta}{\alpha\pi^2}\rho_1(T)+\alpha\rho_2(T)\right),$$

$$m_2(T)=\sqrt{5}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\rho_1(T)+\rho_2(T)), \quad m_3=\sqrt{5}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta}{\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Из (29) и (30) получаем:

$$\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}}\le$$

$$\le n_1(T)\left(\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0''(t)-\overline{h}_0''(t)\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\|h_1''(t)-\overline{h}_1''(t)\|_{C[0,T]}+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\|\psi^{(4)}(x)-\overline{\psi}^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\|\psi^{(2)}(x)-\overline{\psi}^{(2)}(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\right)+$$

$$+n_2(T)\sqrt{T}(\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}}), \qquad (31)$$

где

$$n_1(T)=q_1(T)+q_2(T)+q_3(T)+q_4(T)+q_5(T)+q_6(T)+q_7(T)+q_8(T)+$$
$$+q_9(T)+q_{10}(T)+2m_1(T)+2m_2(T)+2m_3\sqrt{T}+2m_3\sqrt{T}\|a_1(t)\|_{C[0,T]},$$

$$n_2(T)=q(T)+2m_3\sqrt{T}(\|a_0(t)\|_{C[0,T]}+\|\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}})+2m_3\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}.$$

Таким образом, можно доказать следующую теорему.

Теорема. Предположим, что удовлетворяются условия 1°-6°, соотношения $A(T)\sqrt{T}<1$ и $n_2(T)\sqrt{T}<1$ и решения задачи (1)-(4) находятся в шаре $K=K_R$ $(\|z\|_{E_T}\le R)$ пространства E_T. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|a_0(t)-\bar a_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\bar a_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\bar u(x,t)\|_{B^4_{2,T}}\le$$

$$\le n(T)\Bigg(\left\|h_0(t)-\bar h_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|h_1(t)-\bar h_1(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|h_0''(t)-\bar h_0''(t)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|h_1''(t)-\bar h_1''(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar g(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar f(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+\left\|\varphi^{(4)}(x)-\bar\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\left\|\psi^{(4)}(x)-\bar\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|\psi^{(2)}(x)-\bar\psi^{(2)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar f(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar f(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar g(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar g(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\Bigg),$$

где

$$A(T)=\max_T\{A_3(T),A_4(T)\},$$

$$A_3(T)=A_2(T)\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+m_3\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)},$$

$$A_4(T)=(A_2(T)+m_3)\sqrt{T},$$

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}[c_0\left(\|g_{01}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)\|_{C[0,T]}\right)+$$
$$+c_1\left(\|g_{00}(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0(t)\|_{C[0,T]}\right)]b_3(T),$$

$$n(T)=\frac{n_1(T)}{1-n_2(T)\sqrt{T}}.$$

Доказательство. Из соотношения (31) видно, что

$$(1-n_2(T)\sqrt{T})(\|a_0(t)-\bar a_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\bar a_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\bar u(x,t)\|_{B^4_{2,T}})\le$$

$$\le n_1(T)(\left\|h_0(t)-\bar h_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|h_1(t)-\bar h_1(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|h_0''(t)-\bar h_0''(t)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|h_1''(t)-\bar h_1''(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial}{\partial x^2}\bar g(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+\left\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\left\|\psi^{(4)}(x)-\overline{\psi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|\psi^{(2)}(x)-\overline{\psi}^{(2)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\right).$$

Учитывая, что $n_2(T)\sqrt{T}<1,$ из последнего соотношения получаем:

$$(\|a_0(t)-\overline{a}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)-\overline{a}_1(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B^4_{2,T}})\leq$$

$$\leq\frac{n_1(T)}{1-n_2(T)\sqrt{T}}(\|h_0(t)-\overline{h}_0(t)\|_{C[0,T]}+\|h_1(t)-\overline{h}_1(t)\|_{C[0,T]}+\|h_0''(t)-\overline{h}_0''(t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+\|h_1''(t)-\overline{h}_1''(t)\|_{C[0,T]}+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\varphi^{(4)}(x)-\overline{\varphi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|\psi^{(4)}(x)-\overline{\psi}^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\left\|\psi^{(2)}(x)-\overline{\psi}^{(2)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{f}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}g(x,t)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{g}(x,t)\right\|_{L_2(Q_T)}\right).$$

Отсюда, в силу того, что

$$\frac{n_1(T)}{1-n_2(T)\sqrt{T}}=n(T),$$

следует справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Намазов Г.К. Обратные задачи теории уравнений математической физики. Баку – 1984, 125 стр.
2. Г.К.Намазов, А.М.Алиева. Задача об определении неизвестного коэффициента и свободного члена псевдогиперболического уравнения третьего порядка при

нелокальных краевых и дополнительных условиях. Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2002, №2, стр. 106-113.
3. K.İ.Xudaverdiyev. Qeyri-xətti hiperbolik tənliklər üçün qoyulmuş çoxölçülü qarışıq məsələ. Bakı – 1987, 88 səh.
4. Намазов Г.К. Обратная задача для нетиповых уравнений третьего порядка с нелокальными краевыми условиями. Труды конференции, посвященной 80-летию К.Т.Ахмедова. 30-31 октября 1997г. Баку-1988, стр.7-10.
5. Намазов Г.К., Мегралиев Я.Т. Обратная задача для общего псевдогиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. Деп. в Аз. НИИНТИ 24.02.94, №2098, 12 стр.
6. Намазов Г.К., Мегралиев Я.Т. Задача об определении неизвестных коэффициентов псевдогиперболического уравнения третьего порядка. Деп. в Аз. НИИНТИ 29.02.94, №2099, 16 стр.

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD VƏ ƏLAVƏ ŞƏRTLƏR DAXİLİNDƏ ÜÇÜNCÜ TƏRTİB PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN KƏSİLMƏZ ASILILIĞI

Q.K.NAMAZOV, A.M.ƏLİYEVA

ANNOTASİYA

İşdə qeyri-lokal sərhəd şərtləri olan psevdohiperbolik tənlik üçün tərs sərhəd məsələsinin həllinin kəsilməz asılılığı öyrənilir.

CONTINUOUS DEPENDENCE OF SOLUTION OF THE INVERSE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH NONLOCAL BOUNDARY AND ADDITIONAL CONDITIONS

G.K.NAMAZOV, A.M.ALIYEVA

ABSTRACT

Continuous dependence of solution of the inverse boundary-value problem for pseudohyperbolic equation with nonlocal boundary conditions is studied in the paper.